Pesquisas e Práticas Educativas

ISSN: 2675-5149
Seção: Artigos
Submetido: 04/08/2020 | **Aprovado**: 31/08/2020

A MÚSICA COMO PROPOSTA DE ATIVIDADE PEDAGÓGICA NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Valdineia Rodrigues Lima[1]
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8605-1348

Ana Clédina Rodrigues Gomes[2]
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7152-4237

Osmar Tharlles Borges de Oliveira[3]
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6209-7352

RESUMO

A ludicidade é compreendida nesta pesquisa como toda e qualquer ação que ao ser executada produza prazer no praticante, possibilitando a experimentação de novas situações em sala de aula. Dessa forma, a utilização da música no ensino de matemática pode ser entendida como uma atividade lúdica no processo educativo e proporcionar um aprender harmônico entre a ciência exata e os sons, além de ser um elemento de atividade cultural, que estimula padrões e regras, e ao mesmo tempo a sensibilidade. Nesse contexto, esta pesquisa apresenta a música como uma possibilidade lúdica no aprendizado matemático. A revisão da literatura possibilitou um aprofundamento com a temática, sendo utilizado uma abordagem histórica para trabalhar a matemática na escala pitagórica. Para atingir o objetivo da pesquisa, foi apresentado uma proposta de atividade pedagógica, que aborda a descoberta de Pitágoras sobre os princípios matemáticos subjacentes à construção de escala musical, buscando apresentar a música como uma possibilidade lúdica no aprendizado matemático, estreitando ainda mais a relação entre as duas áreas. Pois, ao apresentar a música como um recurso didático com caráter lúdico, o professor pode proporcionar ao aluno o aprendizado e internalização dos conhecimentos matemáticos, tendo em vista que ele vai ter a possibilidade de aprender matematicamente e ouvir harmonicamente as razões, além de possibilitar a compreensão da distinção entre razão e proporção, que muitas vezes é mal interpretada. Dessa forma, entende-se que uma interação entre a matemática e a música pode desenvolver um aprendizado prazeroso e harmônico em sala de aula.

Palavras-chave: Ensino de Matemática; Música; Ludicidade.

MUSIC AS A PROPOSAL FOR PEDAGOGICAL ACTIVITY IN MATHEMATICS TEACHING

ABSTRACT

[1]Licenciada em Matemática pela Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará (Unifesspa). Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (PPGECM) da Unifesspa. Marabá, Pará, Brasil. E-mail: valdineia@unifesspa.edu.br.
[2]Doutora em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP). Professora Adjunta da Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará (Unifesspa), vinculada à Faculdade de Ciências da Educação e ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Marabá, Pará, Brasil. E-mail: ana.cledina@unifesspa.edu.br .
[3]Licenciado em Matemática pela Universidade do Estado do Pará (UEPA). Mestrando do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (PPGECM) da Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará (Unifesspa). Professor Auxiliar da Unifesspa, vinculado à Faculdade de Matemática do Instituto de Engenharia do Araguaia, Santana do Araguaia, Pará, Brasil. E-mail: osmar.borges@unifesspa.edu.br .

The Playfulness is understood in this research as all activity that, when performed produce pleasure in the practitioner, enabling the experimentation of new situations in the classroom. Thus, the use of music in the teaching of mathematics can be understood as a playful activity in the educational process and provide a harmonious learning between exact science and sounds, in addition to being an element of cultural activity, which stimulates patterns and rules, and at the same time sensitivity. In this context, this research present music as a playful possibility in mathematical learning. The literature review made it possible to deepen the theme, using a historical approach to work mathematics on the Pythagorean scale. To achieve the research objective, we present a proposal for a pedagogical activity that addresses the discovery of Pythagoras on the mathematical principles underlying the construction of a musical scale, seeking to present music as a playful possibility in mathematical learning, further narrowing the relationship between the two areas. Because, when presenting music as a didactic resource with a playful character, the teacher can provide the student to learn and internationalize mathematical knowledge, considering that he will be able to learn mathematically and listen harmoniously to the reasons, in addition to making it possible to understand the distinction between reason and proportion, which is often misinterpreted. Thus, we understand that an interaction between mathematics and music can develop a pleasant and harmonic learning in the classroom.
Keywords: Mathematics teaching; Music; Playfulness.

LA MÚSICA COMO PROPUESTA DE ACTIVIDAD PEDAGÓGICA EN LA ENSEÑANZA DE MATEMÁTICAS

RESUMEN

El lúdico se entiende en esta investigación como cualquier acción que cuando se realizan, producen placer en el practicante, permitiendo la experimentación de nuevas situaciones en el aula. Por lo tanto, el uso de la música en la enseñanza de las matemáticas puede entenderse como una actividad lúdica en el proceso educativo y proporcionar un aprendizaje armonioso entre la ciencia exacta y los sonidos, además de ser un elemento de actividad cultural, que estimula patrones, reglas, y al mismo tiempo sensibilidad. Esta investigación presenta la música como una posibilidad lúdica en el aprendizaje matemático. La revisión de la literatura permitió profundizar el tema, utilizando un enfoque histórico para trabajar las matemáticas en la escala de Pitágoras. Para lograr el objetivo, se presentó una propuesta para una actividad pedagógica que aborda el descubrimiento de Pitágoras sobre los principios matemáticos subyacentes a la construcción de una escala musical, buscando presentar la música como una posibilidad lúdica en el aprendizaje matemático, estrechando la relación entre las dos áreas. Porque, al presentar la música como un recurso didáctico con carácter lúdico, el maestro puede proporcionar al alumno el aprendizaje y la internacionalización del conocimiento matemático, teniendo en cuenta que tendrá la posibilidad de aprender matemáticamente y escuchar armoniosamente la razón, además de permitir comprensión de distinción entre razón y proporción, que a menudo se malinterpreta. De esa forma, se entiende que una interacción entre matemáticas y la música puede desarrollar un aprendizaje agradable y armónico en el aula.
Palabras clave: Enseñanza de las matemáticas; Música**;** Lúdico.

INTRODUÇÃO

Atualmente, o grande desafio de um educador está em possibilitar estratégias de aprendizagem que auxiliem na construção do conhecimento dos estudantes. Na Matemática, esse desafio é intensificado, pois se trata de uma ciência exata e complexa, fazendo com que crianças e com que adolescentes tenham dificuldades para apreendê-la e para executá-la. Mudar essa realidade demanda a implantação

de novas formas de ensino na Educação Básica, que possibilitem a esse aluno aprender e a internalizar os conhecimentos que lhes são apresentados em sala de aula.

A ludicidade apresenta-se como um instrumento pedagógico que proporciona um aprendizado de maneira diferente das aulas convencionais, por meio da interação e do entretenimento, o que pode tornar a aula mais atrativa e divertida.

Entretanto, definir o lúdico perpassa alguns entraves, pois implica em uma diversidade de elementos, como, por exemplo, o divertimento, a brincadeira, o jogo e o brinquedo e os experimentos científicos. Ao estudar o jogo como elemento da cultura, Huizinga (1971) afirma que o conceito de jogo deve permanecer distinto de outras formas de pensamento, devendo limitar-se a descrever suas principais características. Contraponto a esse pensamento, a atividade lúdica é definida, por Friedmann (1996), como uma abrangência dos conceitos de jogo, brincadeira e brinquedo.

Para Silva e colaboradores (2013), a brincadeira desenvolve, nas crianças e nos jovens, o prazer e a alegria em aprender e a curiosidade que as move em suas brincadeiras, de certa forma, é a mesma que move os cientistas em suas pesquisas, assim, conciliar a alegria da brincadeira com aprendizagem do aluno é algo que se torna desejável. Entretanto, o conceito de ludicidade vai muito além de jogos e de brincadeiras; na esfera musical, a ludicidade permanece "[...] na reprodução, imitação, brincadeira, espontaneidade e interação da criança com os sons e com os instrumentos, mas não abarca a ação de produzir música, visto que essa seria uma faceta do profissional formado em música" (SILVA *et al.*, 2013, p. 104).

Nesse contexto, compreender o lúdico no ensino de Matemática contribui para que aluno descubra o que existe além dos limites tradicionais da sala de aula, aguçando sua curiosidade na construção e reconstrução da Matemática, possibilitando troca de experiências e novas descobertas, o que desperta o interesse pela disciplina, na reprodução de experimentos científicos que atrai a atenção do aluno.

Diante da abrangência de conceitos, a ludicidade é compreendida nesta pesquisa como toda e qualquer ação que ao ser executada produza prazer no praticante, possibilitando a experimentação de novas situações. Essa concepção vai de encontro a percepção de Ferráz e Fusari (1993) que apontam as práticas artísticas como uma atividade lúdica.

Para Barbosa (2011), "[..] uma linguagem aguçadora dos sentidos transmite significados que não podem ser transmitidos por intermédio de nenhum outro tipo de linguagem, tais como a discursiva e científica" (BARBOSA, 2011, p. 18). A música é um meio de expressão, que desenvolve a autoestima, o equilíbrio e autoconhecimento, promove uma integração social, além de trazer em sua estrutura transitória os contextos musicais oriundos de razões matemáticas.

Contudo, como o professor pode trabalhar a música na aula de matemática? Seria possível o aluno aprender matemática harmonicamente? Quebrando assim o tabu de que a matemática é difícil. Esses foram alguns dos questionamentos que moveram o desenvolvimento desta pesquisa, que teve como objetivo apresentar a música como uma possibilidade lúdica no aprendizado matemático. Possibilitando, portanto, um contexto matemático-musical que pode despertar tanto o interesse do aluno pela matemática, como pela música.

Para Silva e colaboradores (2013), a inovação educacional agregada a um ambiente de aprendizagem que possibilite o bem-estar dos estudantes, apresentará com certeza um retorno significativo e satisfatório, no que diz respeito à absorção das informações que serão transmitidas e guardadas no aprendizado de cada um desses alunos, uma vez que a novidade atrai curiosidade e a Matemática pode ser redescoberta nessa pesquisa por meio da ludicidade musical.

MATEMATIZANDO DA ARTE À MÚSICA

Tendo em vista que o conhecimento matemático sem contextualização, numa perspectiva tradicional, não contribui para a superação de problemas didático-pedagógicos que os professores enfrentam. Para Gonçalves e Santos (2019), inter-relacionar conceitos matemáticos com as artes pode ser um caminho favorável, pois essas práticas divergem da abordagem tradicional.

Muitos ignoram o fato de que há arte na matemática e vice-versa, afinal uma se apresenta como fria, calculista e sem sentimentos, enquanto a outra é colorida, expressa emoções e sensações, parecendo até a contraposição entre razão e emoção, no entanto essa separação excludente não é real, para exemplificar faz-se necessário voltar um pouco na história.

Na Matemática, a percepção mais primitiva pode ser representada no contraste entre alcateia e um lobo, sardinha e o tubarão duende. Na arte, podem estar nos vestígios arqueológicos, no período histórico Paleolítico Superior, em que a espécie humana começou a produzir artefatos, ferramentas e ocorreram os primeiros registros de sua realidade por meio de pinturas, manifestando-se artisticamente. Entre essas pinturas também havia traços sequenciados, que Gonçalves e Santos (2019) sugerem que pode representar o registro de contagem de suas caças.

Os egípcios foram expressivos na relação arte-ciência, imensas pirâmides foram construídas a partir de grandes paralelepípedos esculpidos em rochas brutas extraídas da natureza, além das estátuas que foram as primeiras a representarem a beleza estética do corpo humano, curiosamente, com 90 graus exatos em relação ao solo, tal fato, pressupõe conhecimentos relativos às propriedades do triângulo retângulo.

Os gregos inspiraram-se nessas estátuas egípcias, esculpindo figuras humanas nuas e eretas, com um realismo que surpreende, tendo como diferencial no que se refere à inspiração inicial, com o avanço das técnicas, a noção de movimento. Berço de grandes filósofos, matemáticos e cientistas teve o primeiro experimento científico concebido através da relação arte-ciência, curiosamente, por meio da Matemática e da Música.

O Renascimento foi um período histórico em que não se separava arte e ciência, retomando valores estéticos e racionais da Antiguidade Clássica. O exemplo mais clássico desse período é Leonardo da Vinci e a pintura Mona Lisa, que apresenta em sua anatomia medidas proporcionais à razão áurea da sequência de Leonardo Fibonacci.

Em meio a tantos fatos históricos, Gonçalves e Santos (2019) afirmam que a separação excludente entre arte e Matemática não é real. Os autores ressaltam ainda que "[...] a visão fragmentada difundida é uma construção que provém da forma como nós, seres humanos, viemos produzindo nosso conhecimento no decorrer de nossa história evolutiva" (GONÇALVES; SANTOS, 2019, p. 83). Entretanto, a relação com a Matemática não se limita somente as artes visuais, mas, também, na música, no teatro, na dança e outros possíveis campos. Dessa maneira, essa exploração das relações da Matemática com arte no âmbito escolar é uma possibilidade de estimular a criatividade, criticidade, e ainda despertar a afetividade pela Matemática (CAMPOS, 2014; GREGORUTTI, 2016).

Dessa forma é possível perceber que essa relação entre a Matemática e a Música é conhecida desde a Antiguidade (GONÇALVES; ABDOUNUR, 2019; GONÇALVES; SANTOS, 2019; SANTOS-LUIZ *et al.*, 2015; WALKER; DON, 2013), quando sua ligação foi explorada pelos pitagóricos (GRANJA, 2019). Paralelamente, a Música e a Matemática são universais e acompanham a história da humanidade, transpondo fronteiras históricas, culturais e intelectuais, em uma transversalidade a culturas e épocas.

Muitos foram os matemáticos e físicos que sentiram essa analogia entre a Música e a Matemática como Pitágoras de Samos, Leonhard Euler, Galileu Galilei, dentre tantos outros, da mesma forma que os músicos fizeram uso da Matemática para descrever suas artes. E essa interação entre a Matemática e Música fez com que a linguagem musical fosse matematizada ao longo do tempo, surgindo segundo Santos-Luiz *et al*. (2015) ideias matemáticas que são usadas como ferramentas básicas pelos compositores, desde a linha dodecafônica de Schöenberg até o uso das teorias dos grupos, fractais e superfícies geodésicas.

O vínculo existente entre os conteúdos matemáticos e musicais, no que concerne à teoria e análises musicais é exposto sob vários aspectos segundo Santos-Luiz

e colaboradores (2015), quais sejam: (i) os intervalos musicais estão associados a relações numéricas e proporções, a operações aritméticas, a logaritmos e a exponenciais; (ii) as escalas Pitagórica, Natural e Mesotônica ligam-se com as relações numéricas e proporções e os números racionais; (iii) os acordes ligam-se com as relações numéricas e proporções; (iv) a harmonia relaciona-se com os múltiplos inteiros e as relações numéricas e proporções; (v) o timbre associa-se a funções trigonométricas; (vi) a duração das notas (figuras musicais) e sons relaciona-se com múltiplos inteiros, relações numéricas, proporções e operações aritméticas; notas e pausas (adição, multiplicação e divisão), tercina (divisão) e ligaduras de prolongação (adição) e (vii) a nota musical/som/frequência/altura do som liga-se com múltiplos inteiros, operações aritméticas na Escala do Temperamento igual (multiplicação e divisão), funções trigonométricas e logaritmos, entre outros.

Desse modo, como existe uma afinidade estrutural entre a Música e Matemática ela pode ser explorada, envolvendo diversos conteúdos no ensino de Matemática, mostrando ao aluno "que a Matemática é capaz de produzir arte! " (CAMARGOS, 2010, p. 137). Proporcionado uma aprendizagem matemática através da música/sons.

Vale salientar que o contexto matemático-musical permite

> [...] elucidar diferenças semânticas existentes entre conceitos de composição e de multiplicação, assim como entre conceitos de proporção e de identidade, que praticamente desaparecem quando consideradas sob uma perspectiva puramente aritmética (ABDOUNUR, 2019, p. 32).

A fim de evidenciar isso, faz-se necessário a correspondência entre razão Matemática e intervalo musical.

ABORDAGEM METODOLÓGICA

Na busca pelo aprofundamento da temática foi realizado uma revisão da literatura, que pressupõe requisito para qualquer pesquisa, o que possibilitou uma visão ampla do conceito de lúdico e a relação entre a Matemática e a Música ao longo da história.

Foi utilizado uma abordagem histórica para trabalhar a Matemática na escola pitagórica. Segundo Pérez e Ozámiz (1993), a abordagem histórica aproxima as pessoas da Matemática como ciência humana, não divinizada, ora dolorosamente rasteira, ora falível; sendo também capaz de corrigir seus erros e isso aproxima o aluno das personalidades interessantes, dos homens que os ajudaram a impulsioná-la por muitos séculos, por razões muito diferentes.

Para apresentar a música como uma proposta pedagógica no ensino de Matemática em sala de aula, uma atividade prática utilizando o violão e um lápis foi proposta de forma adaptada a experiência de Pitágoras, realizada com um monocórdio, visando trabalhar a Matemática presente na escala pitagórica, para que os alunos possam aprender ouvindo os sons das razões.

EXEMPLIFICANDO MATEMATICAMENTE A ESCALA PITAGÓRICA EM UMA ABORDAGEM HISTÓRICA

No intuito de facilitar a compreensão de como o professor pode trabalhar a Matemática presente na escala pitagórica, em uma abordagem histórica, a atividade proposta aborda a descoberta de Pitágoras sobre os princípios matemáticos subjacentes à construção de escala musical. Historicamente, segundo Abdounur (2003), surgem, no século VI a.C., os primeiros sinais de um casamento entre a Matemática e a Música, por meio das experiências desenvolvidas por Pitágoras com os sons de um monocórdio.

Pitágoras utilizou um monocórdio, instrumento musical de uma única corda esticada entre dois cavaletes, para investigar os sons que eram produzidos ao pressionar diferentes pontos. Os experimentos iniciais acabaram evidenciando a relação existente entre o comprimento de uma corda estendida e a altura musical do som que era emitido quando era tocada, a buscar por relações de comprimentos e razões de números inteiros, que produziam determinados intervalos sonoros (ABDOUNUR, 2003).

Ao comparar esses sons com o som da corda solta Pitágoras percebeu que determinados casos a *sensação* sonora obtida soava mais agradável aos ouvidos. Essa sensação ocorreu, principalmente, "[...] ao se dividir a corda em razões simples entre os números inteiros 1, 2, 3 e 4" (GRANJA, 2019, p. 182).

Figura 1 – Modelo de monocórdio

Fonte: Camargos (2010, p.150)

A experiência de Pitágoras com os sons do monocórdio resulta em "[...] uma de suas mais belas descobertas, que dá luz, na época, ao quarto ramo da matemática: a *música*" (ABDOUNUR, 2003, p. 4), de forma que os pitagóricos acabaram por fundamentar a música cientificamente.

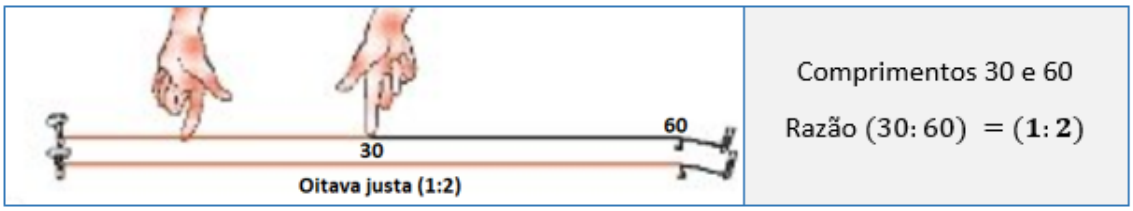
Ao utilizar uma abordagem histórica para trabalhar a Matemática, semelhantemente à escola pitagórica, envolvendo sons e frações, proporciona-se outra visão da Matemática pelo o aluno, fazendo com que ela seja vista como "[...] um saber significativo, que foi e é construído pelo homem para responder suas dúvidas na leitura do mundo, permitindo ao aluno apropriar-se desse saber, o que lhe propiciará uma melhor leitura do contexto global". (GROENWALD; SAUER; FRANKE, 2005, s/p.).

No experimento de Pitágoras ao pressionar um ponto situado a (1:2) do comprimento da corda gerou o intervalo musical "denominado em grego como *Diapason*" (GRANJA, 2019, p. 183). O entendimento de intervalo musical adotado no texto, de acordo com Poldi e Goldberger (2001) e Granja (2019) é a distância entre duas notas musicais. Uma sequência ordenada de notas (sons) é chamada de escala. Assim, o nome do intervalo depende do número de notas da escala. Por exemplo, um intervalo de Dó (C) para Sol (G) é dito intervalo de quinta pois existem cinco notas no intervalo, ou seja, Dó, Ré, Mi, Fá e Sol (C, D, E, F, G). Para um intervalo de terça, considerando ainda a nota Dó (C) temos Dó, Ré e Mi (C, D, E), isto é, três notas. Analogamente determinamos os nomes de quaisquer intervalos.

Para exemplificar matematicamente o experimento de Pitágoras, vamos supor que o comprimento da corda esticada seja 60 unidades, valor próximo ao comprimento da corda do violão, que foi o objeto utilizado na proposta da atividade prática desta pesquisa. Ressaltamos que a escolha do violão como ferramenta auxiliar na atividade proposta se dá pela praticidade de seu uso, assim como sua popularidade, uma vez que, reproduzir as mesmas condições que os pitagóricos enfrentaram necessitaria da construção de um monocórdio, pois não é algo que encontramos em qualquer loja de instrumentos.

Tendo os comprimentos 30 e 60, obtém-se a primeira consonância percebida, na divisão da corda na razão (1:2). Esse intervalo musical é conhecido atualmente por oitava justa. O resultado é que a nota reduzida é considerada equivalente a nota original, entretanto, mais aguda. A corda quando percutida em sua metade gera um som com o dobro do número de vibrações. Representando em um piano seria como duas notas Dó, uma mais grave e outra mais aguda Figura 2.

Figura 2 – Razão (1:2)

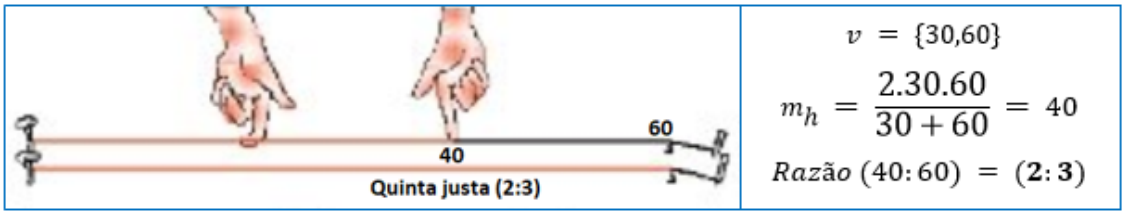


Fonte: Elaborada pelos autores

Para Granja (2019), outra descoberta de Pitágoras foi perceber as consonâncias musicais ao dividir a corda no monocórdio na razão de (2:3) e de (3:4), obtendo assim, os intervalos musicais *Diapente* e *Diatessaron,* conhecidos, atualmente, como quinta justa e quarta justa, respectivamente, utilizando a média harmônica e a média aritmética. Representando matematicamente essa situação com os valores iniciais de 30 e 60 aplica-se o caso especial da média harmônica, pois nessa situação constam somente dois valores.

A média harmônica gera um comprimento de 40 unidades, correspondendo a razão de (2:3) que é o intervalo de quinta justa. Agora utilizando novamente os valores iniciais 30 e 60, aplica-se a média aritmética.

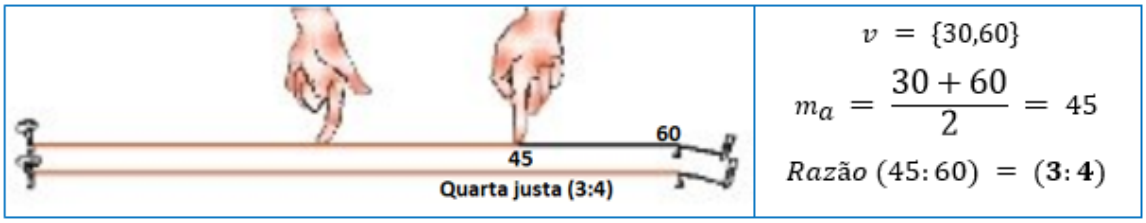
Figura 3 – Razão (2:3)



Fonte: Elaborada pelos autores

A média aritmética gera um comprimento de 45 unidades, correspondendo a razão de (3:4) que equivale o intervalo de quarta justa. Com essas duas médias (harmônica e aritmética) obtém se o princípio fundamental da harmonia pitagórica.

Figura 4 – Razão (3:4)

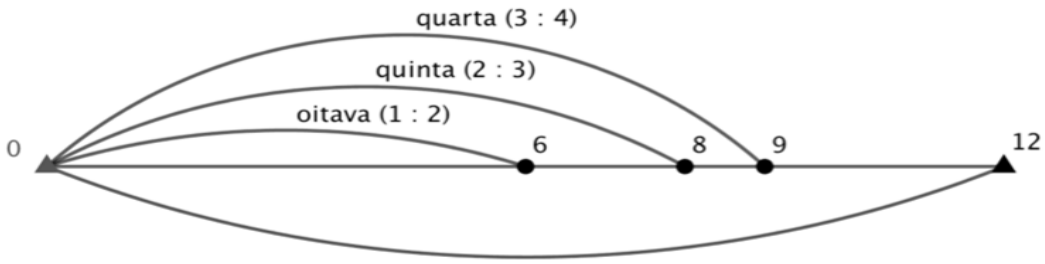


Fonte: Elaborada pelos autores

Além disso, pode-se observar, segundo Granja (2019), que a composição de uma quinta justa com uma quarta justa, equivale ao intervalo de oitava justa, à medida

que $\left(\frac{2}{3}.\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\right)$, e a distância entre eles forma um tom inteiro $\left(\frac{2}{3}:\frac{3}{4}=\frac{8}{9}\right)$ que corresponde a razão de (8:9). Conforme representado na imagem.

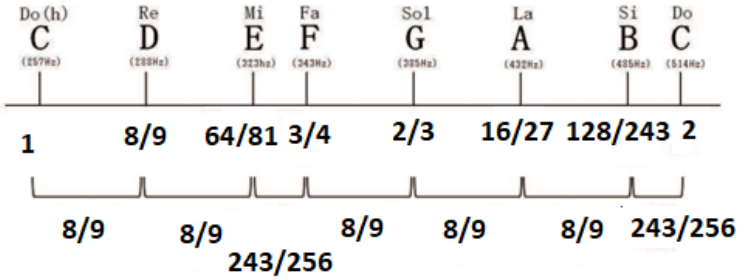
Figura 5: Corda inteira (1:1)



Fonte: Granja (2019, p.194)

Segundo Abdounur (2003), os intervalos musicais obtidos no experimento de Pitágoras passam a ser denominados de consonâncias pitagóricas, estabelecendo relações entre a Matemática e a Música, ao associar os intervalos musicais oitava justa, quinta justa e quarta justa às razões (1:2), (2:3) e (3:4), sendo a corda inteira representada pela razão (1:1).

Figura 6 – Sequência das notas musicais dentro da escala em uma oitava e as razões denominadas consonâncias pitagóricas



Fonte: Adaptado pelos autores a partir de Kanemitsu *et al*. (2015, p. 13)

Sobre essas razões de números inteiros Santos (2015) destaca a oitava justa (1:2) e a quinta justa (2:3), a primeira devido ao tocar a corda reduzida a sua metade obtém-se o mesmo som, no entanto, o primeiro grave e o segundo agudo, comparando tal situação ao som que é produzido ao ser cantada a mesma nota por um homem e uma mulher, e a segunda devido Pitágoras ter organizado matematicamente, a partir da razão (2:3), todo o espectro sonoro grego, através de multiplicações sucessivas.

A partir das notas musicais Dó, Fá, Sol e Dó (uma oitava acima) encontradas por Pitágoras utilizando o monocórdio é possível descobrir as demais notas do intervalo de oitava, por um procedimento denominado de ciclo das quintas, com a aplicação de multiplicações sucessivas da razão (2:3).

Simplificadamente, baseado em Kanemitsu e colaboradores (2015), Abdounur (2003) e Santos (2015), destaca-se fator importante, que deve ser levando em consideração é o comprimento C da corda que pertence ao intervalo da escala pitagórica, na qual deve estar entre 0,5 e 1 para satisfazer a condição de existência. Sendo assim, utilizando o ciclo das quintas, a quinta nota partindo de Sol (observar a figura 6) tem-se a nota Ré, em que $\left(\frac{2}{3}.\frac{2}{3}=\frac{4}{9}\right)$ no entanto, pela condição de existência observa-se que $\left(\frac{4}{9}=0{,}44<0{,}5\right)$ o que não satisfaz. Sendo assim, deve-se descer uma oitava, procedimento chamado por Santos (2015) de oitava abaixo, o qual consiste em multiplicar a razão 2, dobrando o tamanho da corda $\left(\frac{4}{9}.2=\frac{8}{9}=0{,}88\right)$ e dessa maneira a condição é satisfeita, ou seja, (0,5 < 0,88 < 1) e a razão da corda da nota Ré (D) é (8:9).

Partindo da nota Ré (a quinta nota é Lá) de razão (8:9) e multiplicando pela razão quinta (2:3) obtém-se $\left(\frac{8}{9}.\frac{2}{3}=\frac{16}{27}=0{,}59>0{,}5\right)$ dessa forma, a razão da corda Lá é (16:27). Seguindo com o ciclo das quintas, a partir de Lá (a quinta nota é Mi), temos $\left(\frac{16}{27}.\frac{2}{3}=\frac{32}{81}=0{,}39<0{,}5\right)$, por não satisfazer a condição de existência aplica-se uma oitava abaixo $\left(\frac{32}{81}.2=\frac{64}{81}=0{,}79>0{,}5\right)$, a razão de Mi é (64:81).A quinta nota partindo de Mi é Sí, como a razão de Mi é (64:81) temos $\left(\frac{64}{81}.\frac{2}{3}=\frac{128}{243}=0{,}52>0{,}5\right)$, logo a condição de existência é satisfeita e a razão da corda da nota Si é (128:243).

A Figura 6 mostra-nos as notas da escala pitagórica e suas respectivas razões nas quais a distância dos intervalos está na razão (8:9) exceto os intervalos de Mi para Fá e de Si para Dó. A razão (8:9) corresponde a um tom e a razão (243:256) ao meio tom.

Faz-se importante mencionar que a escala pitagórica é apenas uma base para o experimento, pois a escala que é utilizada atualmente chama-se escala temperada, uma vez que a pitagórica apresentou um problema enquanto afinação das notas da escala, ou seja,

> [...] após uma sucessão de 12 quintas, deveríamos chegar à mesma nota do ponto de partida (7 oitavas acima), mas isso não ocorre. Esse erro ou desvio é chamado de coma pitagórica. Pode-se, então, definir a coma pitagórica como sendo a diferença entre a nota obtida após percorrer 12 quintas puras e aquela obtida após percorrer 7 oitavas. (ZUMPANO, GOLDEMBERG, 2016, p. 2).

As diferenças em cada intervalo foram apresentas por Granja (2019) abrangendo as diferenças existentes entre a escala pitagórica e a escala temperada utilizada na construção do violão.

Quadro 1 – Diferenças em cada intervalo entre a escala pitagórica e a escala temperada

VIOLÃO		ESCALA PITAGÓRICA			ESCALA TEMPERADA
Traste do violão	Intervalo	Razão	Decimal	Distância em relação à pestana - cm	Distância em relação à pestana - cm
2	Segunda Maior	8 : 9	0,89	7,22	7,09
4	Terça Maior	64 : 81	0,79	13,64	13,41
5	Quarta Justa	3 : 4	0,75	16,25	16,30
7	Quinta Justa	2 : 3	0,67	21,67	21,62
9	Sexta Maior	16 : 27	0,59	26,48	26,35
11	Sétima Maior	128 : 243	0,53	30,76	30,57
12	Oitava	1 : 2	0,5	32,50	32,50
Total				65,00	65,00

Fonte: Granja (2019, p.186)

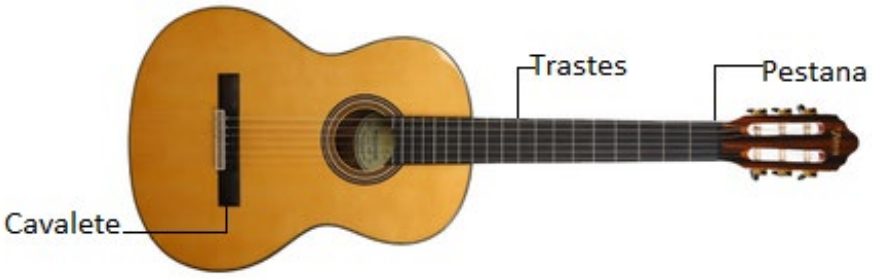
Dessa forma, o professor pode demonstrar o princípio básico do experimento realizado por Pitágoras com o monocórdio, em sala de aula utilizado um violão, um lápis e uma fita métrica para auxiliar nas medidas das razões.

ATIVIDADE PRÁTICA: OS SONS DAS FRAÇÕES

Como mencionado anteriormente, a relação entre a Matemática e a música é antiga. Contudo, gradualmente, "[...] com a especialização das áreas do conhecimento em disciplinas, a Música foi se distanciando da Matemática até o ponto de muita gente achar no mínimo exótica essa aproximação" (GRANJA, 2006, p. 98). A atividade proposta busca apresentar a música como uma possibilidade lúdica no aprendizado matemático, estreitando esta relação.

A atividade prática, baseada em Granja (2019), objetiva possibilitar que os alunos ouçam os sons das frações será necessário um lápis sextavo, uma fita métrica e um violão. Dessa forma, o professor poderá demonstrar a relação entre as frações e as notas na escala de Dó (C), que pode ser usada em qualquer corda e afinação. Adicionalmente pode-se utilizar de afinadores eletrônicos ou aplicativos de celular com função afinador para comprovar que a nota tocada equivale a nota descrita pela escala. Para facilitar a compreensão da atividade, a Figura 7 apresenta os principais componentes do violão que serão mencionados no texto.

Figura 7 – Violão



Fonte: Elaborada pelos autores

Inicialmente foi realizado a medição do comprimento do cavalete à pestana do violão, para trabalhar com o valor correspondente e subdividi-lo de acordo com as razões determinadas das notas da escala Figura 8.

Figura 8 – Medindo o comprimento da corda do violão

Fonte: Elaborada pelos autores

O lápis deve ser colocado no décimo segundo traste, que equivale à metade do comprimento da corta, ou seja, da pestana até o cavalete do violão, ficando a corda dividida na razão de (1:2). Ao percutir a corda Mi afinada em Dó, a primeira corda de cima para baixo, conforme a Figura 9, de um lado e de outro, o som emitido será o mesmo Mi que é a oitava justa da corda solta.

Figura 9 – Lápis no décimo segundo traste (oitava justa)

Fonte: Elaborada pelos autores

Utilizando agora a razão (2:3), o lápis deve ser posicionado, a partir da pestana, no sétimo traste, ficando $\frac{1}{3}$ entre a traste e a pestana e $\frac{2}{3}$ entre a traste e o cavalete. O som tocado na corda entre o cavalete e a traste gerou o som Sol (G) (cf. Figura 10). Ao se tocar ambos os lados da corda, o intervalo musical obtido será uma quinta justa.

Ao medir na fita o lugar correto, posicionamos a mesma a partir do cavalete e, neste caso, dividimos o comprimento da corda pelo denominador da razão referente a nota e multiplicamos pelo numerador o valor encontrado. Por exemplo, dividir 65 cm (figura 8) pelo denominador da razão (2:3) e multiplicar pelo seu numerador $\left(\frac{65}{3}.2 = 43{,}33\right)$ obtemos aproximadamente 43,3 cm, o que corresponde a posição do sétimo traste a partir da pestana.

Figura 10 – Lápis no sétimo traste (quinta justa)

Fonte: Elaborada pelos autores

O lápis agora deve ser posicionado na quinta traste, ficando $\frac{1}{4}$ entre a traste e a pestana e $\frac{3}{4}$ entre a traste e o cavalete. Entre o cavalete e a traste tem a nota (Lá), ficando a quarta justa.

Figura 11 – Lápis na quinta traste (quarta justa)

Fonte: Elaborada pelos autores

Ao realizar tais subdivisões nas cordas do violão pode-se apresentar de forma prática (lúdica) o experimento feito pela escola pitagórica que relaciona de forma íntima e imbricada as razões matemáticas e as razões dos sons nas cordas do instrumento.

Para determinar a segunda nota a partir da nota Dó, que neste caso é a nota Ré, o lápis é posicionado no segundo traste a partir da pestana (cf. Figura 12). A razão determinada é de (8:9) de acordo com a Figura 6.

Figura 12 – Lápis no segundo traste (segunda maior)

Fonte: Elaborada pelos autores

Analogamente, o mesmo procedimento pode ser feito para toda a escala. Antes da aplicação da atividade sugere-se a realização de um teste com o violão e outra possibilidade é a realização dessa atividade em parceria com um professor de música, caso o professor não tenha afinidade com o violão.

MATEMÁTICA E MÚSICA: DISCUTINDO HARMONICAMENTE

Muitas pessoas não fazem relação entre a Música e a Matemática. A relação entre esses dois pensamentos, matemático e musical, vai muito além da relação entre a lógica escrita de uma partitura com certa lógica geométrica e a aritmética. Granja (2019) acredita ser possível explorar de forma mais profunda a relação entre notas musicais e frações de uma corda vibrante, através do envolvimento dos princípios da construção de instrumentos musicais, construção de escalas entre outros.

A ideia de composição de razões, historicamente, não possui *status* de conceito matemático, sendo uma operação presente na estrutura dos conceitos matemáticos de razão e proporção, com uma semelhança estrutural com a operação de multiplicação (ABDOUNUR, 2019). Ao longo da história a ideia de composição de razões vem se transformando até aproximar-se do conceito de operação multiplicação, representativo do papel do contexto teórico-musical na aritmetização de razões.

Considerando que, para Abdounur (2019), essa estrutura transitória em que as razões matemáticas foram derivadas de contextos musicais, torna-se razoável considerar a música como um cenário para abordar tais diferenças.

Dessa forma, essa abordagem pode despertar o interesse pela matemática por meio da música e vice-versa, além de demandar dos alunos que não são familiarizados com a música, a experiência com a percepção musical. Problemas desenvolvidos nessa percepção exigem aptidões matemáticas e musicais simultaneamente e pode reluzir a curiosidade dos alunos, dando-lhes a oportunidade de vivenciar e simular as operações com razões matemáticas em contextos musicais gregos e medievais. Ao mesmo tempo, problemas como estes podem fornecer um contexto adequado para reflexões sobre, como é possível compor intervalos musicais quando se sabe somente os comprimentos das cordas, em que a razão fornece cada intervalo, ainda sem régua métrica.

As possíveis restrições em instrumentos fornecidos para soluções desses problemas, como compasso, régua métrica e não métrica, podem ser interessantes, na medida que induz os alunos a reproduzirem a maneira em que distintas tradições, ao longo da história lidavam com razões. Assim, os alunos podem operar por vezes com a composição e outras com multiplicação, tal situação oferece um contexto em que esses estudantes podem praticar a diferenciação entre composição e multiplicação, e também entre proporcionalidade e identidade dentro de uma situação prática significativa.

Dessa forma, fazer uso do monocórdio (cf. Figura 1) pode possibilitar ao aluno a compreensão da distinção entre razão e proporção, muitas vezes mal interpretada, tendo em vista que a razão passa a ser encarada como uma comparação envolvendo

duas magnitudes do mesmo tipo, enquanto a proporção ocorre como uma proposição lógica, em que se pode atribuir um valor ou mesmo como ferramenta para tornar-se uma proposição verdadeira.

Portanto, a diferença entre esses dois conceitos se torna melhor demarcada, quando são entendidas segundo Abdounur (2019) no âmbito geométrico-musical, do que quando são vistas somente em contextos puramente aritméticos. Assim, a proposta pedagógica apresentada neste trabalho proporciona um aprendizado harmonioso por meio do contexto matemático-musical.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A utilização da música na sala de aula pode ser entendida como uma atividade inerente a ludicidade. Enquanto a matemática é uma linguagem que fala diretamente à razão, a música fala diretamente aos sentidos, dessa forma, uma interação entre ambas pode proporcionar ao aluno um aprendizado prazeroso e harmônico.

Embora a relação entre Música e Matemática venha desde a antiguidade, acabou se dissociando no tempo, ao ponto que muitas pessoas não fazem relação entre ambas. Com isso, esta pesquisa procurou reestabelecer uma aproximação entre ambas, apresentando a música como uma possibilidade lúdica no aprendizado matemático e abordando a descoberta de Pitágoras sobre os princípios matemáticos subjacentes à construção de escala musical.

Além de proporcionar a aprendizagem matemática, o ensino de música nas escolas é uma política pública regulamentada pela Lei n. 13.278/2016, sendo componente curricular obrigatório do ensino de arte na educação básica. Dessa forma, a música deve estar presente no processo formativo do aluno. Nesse sentido, ressaltamos a importância de se ter um conhecimento básico de música nos cursos de formação de professores, pois essa carência por parte do docente pode ser um dos motivos da música ainda ser pouco trabalhada em sala de aula.

O trabalho apresentou a música como um recurso didático com caráter lúdico que pode possibilitar ao aluno aprender e internalizar os conhecimentos matemáticos, tendo em vista que vai ter a possibilidade de aprender matematicamente e ouvir harmonicamente as razões, além de possibilitar a compreensão da distinção entre razão e proporção, que muitas vezes é mal interpretada.

Enfim, esperamos que de alguma maneira esta pesquisa possa orientar, contribuir e motivar, professores e pesquisadores que venham a ter contato com a mesma, despertando assim, o interesse em trabalhar com a matemática e a música em sala de aula, ou mesmo no desenvolvimento de novas ideias envolvendo o tema.

REFERÊNCIAS

ABDOUNUR, O. J. Composição de razões em matemática e música: uma abordagem histórico/educacional. *In:* SILVA, R. S. R. (org.). **Artes em Educação Matemática**. Porto Alegre: Editora Fi, 2019. p. 81-106.

ABDOUNUR, O. J. **Matemática e música**: pensamento analógico na construção de significados. 3 ed. São Paulo: Escrituras Editora, 2003.

BARBOSA, A. M. (org.). **Inquietações e Mudanças no Ensino da Arte**. 6 ed. São Paulo, Cortez, 2011.

CAMARGOS, C. B. R. **Música e matemática:** a harmonia dos números revelada em uma estratégia de modelagem. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2010.

CAMPOS, G. P. S. **A Teoria dos Conjuntos e a Música de Villa-Lobos**: uma abordagem didática. Tese (Doutorado em Educação) – Curso de Pós-graduação em Educação, Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

FERRÁZ, M. H.; FUSARI, M. F. R. **Metodologia do ensino da arte**. São Paulo: Cortez, 1993.

FRIEDMANN, A. **Brincar***:* crescer e aprender – o resgate do jogo infantil. São Paulo: Moderna, 1996.

GONÇALVES, H. J. L.; SANTOS, E. F. S. Discussões Curriculares sobre a Interface Arte e Matemática a partir de uma Perspectiva Crítica e Criativa. *In:* SILVA, R. S. R. (org.). **Artes em Educação Matemática**. Porto Alegre: Editora Fi, 2019. p. 81-106.

GRANJA, C. E. S. C. Música e Matemática na Sala de Aula. *In:* SILVA, R. S. R. (org.). **Artes em Educação Matemática**. Porto Alegre: Editora Fi, 2019. p. 81-106.

GRANJA, C. E. S. C. **Musicalizando a escola***:* música, conhecimento e educação. São Paulo: Escrituras, 2006.

GREGORUTTI, G. S. **Performance matemática digital e imagem pública da matemática**: viagem poética na formação inicial de professores. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2016.

GROENWALD, C. L. O.; SAUER, L. O.; FRANKE, R. F. A história da matemática como recurso didático para o ensino da teoria dos números e a aprendizagem da matemática no ensino básico. **Paradígma,** Maracay, v. 26, n. 2, p. 35-55, dez 2005. Disponível em http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1011-22512005000200003 1. Acesso em 28 out 2020.

HUIZINGA, J. **Homo ludens***:* o jogo como elemento da cultura. Trad. João Paulo Monteiro. São Paulo: Perspectiva, 1971.

KANEMITSU, Shigeru; CHAKRABORTY, Kalyan; GOTO, Y. **Music as mathematics of senses**. Pure and Applied Mathematics Journal, 2015.

PÉREZ, D. G.; OZÁMIZ, M. G. **Enseñanza de las ciencias y la matemática**: tendencias e innovaciones. Madrid: IBER cima, 1993.

POLDI, Z.; GOLDBERGER, D. **Understanding Music Theory**. London: Omnibus, 2001.

SANTOS, E. F. **Matemática e música na educação**. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de São Paulo, Birigui, 2015.

SANTOS-LUIZ, C. *et al*., Matemática e música: Sistematização de analogias entre conteúdos matemáticos e musicais. **Rev. Port. de Educação**, Braga, v. 28, n. 2, p. 271-293, jun 2015. Disponível em http://www.scielo.mec.pt/pdf/rpe/v28n2/v28n2a14.pdf. Acesso em 28 out 2020.

SILVA, J. L. S.; EVANGELISTA, J. R.; SANTOS, R. B.; MENDES, P. M. Matemática Lúdica Ensino Fundamental e Médio. **Educação em Foco**, ed. n. 6, p. 26-36, maio 2013. Disponível em http://portal.unisepe.com.br/unifia/wp-content/uploads/sites/10001/2018/06/3matematica_ludica.pdf. Acesso em 28 out 2020.

SILVA, N. L. C. **O efeito de sentido da ludicidade na prática do professor de infância**: uma leitura simbólica em fenomenologia. Dissertação (Mestrado em Educação) – Centro de Ciências Humanas e Sociais, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2013.

WALKER, J. S.; DON, G. W. **Mathematics and music**: Composition, perception, and performance. Florida: CRC Press, 2013.

ZUMPANO, N. G. GOLDEMBERG, R. Princípios de Técnica e História do Temperamento Musical. **Revista Sonora**, Campinas, v. 2, n. 4, p. 1-10, 2016. Disponível em https://www.publionline.iar.unicamp.br/index.php/sonora/article/view/638/611 . Acesso em 28 out 2020.